

3 Границы объёмов кодов. Коды Хэмминга

- Граница Хэмминга: $|C| \leq \frac{2^n}{\sum_{i=0}^t C_n^i}$, где $t = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$
(код, достигающий границы Хэмминга, называется *совершенным*).
- Граница Синглтона: $|C| \leq 2^{n-d+1}$
(код, достигающий границы Синглтона, называется *МДР-кодом*).
- Граница Варшамова-Гилберта для линейных кодов:
если $\sum_{i=0}^{d-2} C_{n-1}^i < 2^r$, то существует линейный $[n, k, d']$ -код, такой что $k \geq n - r$ и $d' \geq d$.
- Граница Плоткина: $|C| \leq 2 \lfloor \frac{d}{2d-n} \rfloor$, если $n < 2d$.

Линейный двоичный код, проверочная матрица которого состоит из всевозможных различных ненулевых столбцов длины r , называется *кодом Хэмминга* с r проверками на четность. Двоичные коды C и C' *эквивалентны*, если существуют такие $\pi \in S_n$ и $x \in E^n$, что $x + \pi(C) = C'$. Код *максимален*, если его мощность максимальна при данных n и d .

3.1 Верно ли, что код, исправляющий t ошибок, обнаруживает

- а) не менее $2t + 1$ ошибок;
- б) не менее $2t$ ошибок;
- в) не более $2t$ ошибок?

3.2 Определить параметры двоичного кода Хэмминга. Доказать, что двоичный код Хэмминга единствен с точностью до эквивалентности.

3.3 Пусть в канале связи используется код Хэмминга длины 7, столбцы проверочной матрицы которого лексикографически упорядочены. Пусть на приемном конце получено слово (0110110). Декодировать его и найти информационный блок.

3.4 Построить проверочную матрицу с r строками q -значного кода Хэмминга, вычислить параметры кода.

3.5 Построить проверочную матрицу

- а) с двумя строками для троичного кода Хэмминга. Построить код;
- б) с тремя строками для троичного кода Хэмминга.

3.6 Обобщить для q -значных кодов границы

- а) Хэмминга;
- б) Синглтона;
- в) Варшамова-Гилберта.

3.7 Доказать, что q -значный код Хэмминга является совершенным.

3.8 Существует ли двоичный (16, 10, 9)-код?

3.9 Показать, что не существует максимальных кодов мощности 3.

Теория к Семинару 4 "Способы построения кодов".

Добавление проверки на четность. Выкалывание кодовых координат. Код с выбрасыванием. Пополнение кода путем добавления новых кодовых слов. Удлинение кода путем добавления информационных символов. Укорочение кода. Ортогональный код, построение кода, ортогонального данному линейному. Конструкция Плоткина.