

## 11 Код Шеннона. Графы Маркова

• Пусть функция  $f(x)$  выпукла вверх в области  $I$ . Тогда для произвольных чисел  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, k$  таких, что  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ , и любых  $x_1, \dots, x_k \in I$  справедливо *неравенство Йенсена*:

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot x_i\right).$$

---

**11.1** Доказать, что энтропия  $\mathcal{H}(A)$  источника Бернулли  $A$  неотрицательна и равна 0  $\iff$  когда одна из вероятностей букв равна 1, а остальные вероятности равны 0.

**11.2** Дан источник Бернулли  $A$  с вероятностями букв  $\{p_1, \dots, p_k\}$ , где  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ . Доказать, что справедливо неравенство  $\mathcal{H}(A) \leq \log k$ .

**11.3** Дан источник Бернулли с вероятностями букв  $\{p_1, \dots, p_k\}$ , где  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ . Доказать, что для любых неотрицательных чисел  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , таких что  $\sum_{i=1}^k q_i = 1$ , выполняется неравенство  $-\sum_{i=1}^k p_i \log q_i \geq -\sum_{i=1}^k p_i \log p_i$ .

**11.4** Построить код Шеннона для источника Бернулли с данным распределением вероятностей букв:

- а)  $P = \{0,6; 0,1; 0,09; 0,08; 0,07; 0,06\}$ ;
- б)  $P = \{0,4; 0,4; 0,1; 0,03; 0,03; 0,02; 0,02\}$ ;
- в)  $P = \{0,34; 0,18; 0,17; 0,16; 0,15\}$ .

Найти стоимость кодирования.

**11.5** Доказать, что код Шеннона префиксный.

**11.6** По заданному алфавитному коду  $\Sigma(A)$  построить граф Маркова  $G_\Sigma$  и выяснить, является ли код делимым:

- а)  $\Sigma(A) = \{ab, dc, a, bcadd, ca\}$ ;
- б)  $\Sigma(A) = \{ddac, dd, cddab, a, cddd, b\}$ ;
- в)  $\Sigma(A) = \{abc, abb, bcc, ccaa, bcabbcc, bbccaaabca, abcabbabbcca\}$ .

### Семинар 12 "Адаптивное кодирование".

Кодирование "стопка книг" Б.Я. Рябко. Методы кодирования Лемпела-Зива. Адаптивный код Хаффмена. Арифметическое кодирование.